DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Les candidats sont invités à utiliser scrupuleusement les notations du texte.

La troisième partie est indépendante des première et deuxième parties.

Notations :

- $\mathfrak{M}_2$ désigne l'espace vectoriel, sur le corps des réels, des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On choisit dans $\mathfrak{M}_2$ la base $\mathfrak{B}$ constituée des quatre matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour toute matrice X de $\mathfrak{M}_2$ de la forme $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}$, on a : $X = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 + x_4E_4$.

- u_1, u_2, u_3, u_4 désignant quatre matrices de $\mathfrak{M}_2$, on représentera par $\left[\begin{array}{c:c} u_1 & u_3 \\ \hdashline u_2 & u_4 \end{array}\right]$ la matrice carrée d'ordre 4 obtenue en remplaçant les matrices u_i ($i = 1, 2, 3, 4$) par leurs éléments.

On admettra les propriétés suivantes :

– si $U = \left[\begin{array}{c:c} u_1 & u_3 \\ \hdashline u_2 & u_4 \end{array}\right]$ et $V = \left[\begin{array}{c:c} v_1 & v_3 \\ \hdashline v_2 & v_4 \end{array}\right]$

(où les matrices u_i et v_i sont des éléments de $\mathfrak{M}_2$),

on a alors : $U + V = \left[\begin{array}{c:c} u_1+v_1 & u_3+v_3 \\ \hdashline u_2+v_2 & u_4+v_4 \end{array}\right]$ $\lambda U = \left[\begin{array}{c:c} \lambda u_1 & \lambda u_3 \\ \hdashline \lambda u_2 & \lambda u_4 \end{array}\right]$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

$$U \,.\, V = \left[\begin{array}{c:c} u_1v_1 + u_3v_2 & u_1v_3 + u_3v_4 \\ \hdashline u_2v_1 + u_4v_2 & u_2v_3 + u_4v_4 \end{array}\right]$$

– si $U = \left[\begin{array}{c:c} u_1 & u_3 \\ \hdashline u_2 & u_4 \end{array}\right]$ et si $W = \left[\begin{array}{c} w_1 \\ \hdashline w_2 \end{array}\right]$ $U \,.\, W = \left[\begin{array}{c} u_1w_1 + u_3w_2 \\ \hdashline u_2w_1 + u_4w_2 \end{array}\right]$

(où u_i et w_i sont des éléments de $\mathfrak{M}_2$) (W et U . W sont alors des matrices (4, 2))

(. désigne le produit habituel des matrices).

Première partie

Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_2$; on désigne par F l'application qui, à toute matrice X de $\mathfrak{M}_2$, associe la matrice $F(X) = A.X.B$.

1. Montrer que F est une application linéaire de $\mathfrak{M}_2$ dans lui-même.

2. $\mathfrak{M}_2$ étant rapporté à la base $\mathfrak{B}$, on désigne par $A \otimes B$ la matrice associée à l'application F.

On pose $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix}$ Montrer que l'on a : $A \otimes B = \left[\begin{array}{c:c} b_1A & b_3A \\ \hdashline b_2A & b_4A \end{array}\right]$.

Tournez la page S. V. P.

3. Démontrer les propriétés suivantes : quelles que soient les matrices A, B, P, Q de $\mathfrak{M}_2$,

a. $A \otimes (P + Q) = A \otimes P + A \otimes Q$;

b. $(A + B) \otimes P = A \otimes P + B \otimes P$;

c. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda (A \otimes B) = \lambda A \otimes B = A \otimes \lambda B$;

d. $(P \otimes Q).(A \otimes B) = (P.A) \otimes (B.Q)$.

On pourra :
- pour démontrer *a*, *b*, *c*, utiliser les applications linéaires associées à $A \otimes P$, à $A \otimes Q$, etc . ;
- pour démontrer *d*, utiliser directement les matrices.

4. On désigne par det (M) le déterminant d'une matrice carrée M quelconque. Calculer det $(A \otimes I)$, det $(I \otimes A)$ et det $(A \otimes B)$ en fonction de det (A) et det (B) $\left(\text{où } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

5. *a.* Montrer que si P et Q sont des matrices de $\mathfrak{M}_2$ régulières, alors $P \otimes Q$ est régulière et déterminer $(P \otimes Q)^{-1}$.

b. Montrer que si D et Δ sont deux matrices diagonales de $\mathfrak{M}_2$, alors $D \otimes \Delta$ est aussi diagonale (donner les éléments diagonaux de $D \otimes \Delta$).

c. Montrer que si A et B sont deux matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_2$, alors $A \otimes B$ est diagonalisable.

(On pourra utiliser les propriétés précédentes ainsi que les propriétés de la question 3.)

6. *a.* Soit B une matrice de $\mathfrak{M}_2$ $\quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix}$ telle que $b_1 + b_2 = b_3 + b_4$.

Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_2$

X_1 étant un vecteur propre de A, associé à la valeur propre λ, montrer que $\begin{bmatrix} X_1 \\ \cdots \\ X_1 \end{bmatrix}$ est alors un vecteur propre de $A \otimes B$.

Déterminer la valeur propre associée à ce vecteur propre $\begin{bmatrix} X_1 \\ \cdots \\ X_1 \end{bmatrix}$.

b. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Écrire la matrice $A \otimes B$.

Déterminer les éléments propres de la matrice A.

En déduire deux vecteurs propres de la matrice $A \otimes B$, préciser la valeur propre associée à chacun d'eux.

Calculer le polynôme caractéristique de $A \otimes B$, déterminer les autres valeurs propres de $A \otimes B$.

Deuxième partie

$\mathfrak{L}$ désigne l'ensemble des applications linéaires de $\mathfrak{M}_2$ dans lui-même.

1. Soient B_1, B_2, B_3, B_4 quatre matrices non nulles de $\mathfrak{M}_2$. On leur associe l'élément H de $\mathfrak{L}$ défini par :

$$\forall X \in \mathfrak{M}_2, \quad H(X) = \sum_{i=1}^{4} E_i . X . B_i .$$

Soit $\hat{H}$ la matrice carrée associée à l'application H relativement à la base $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{M}_2$.

On note $\hat{H} = \left[\begin{array}{c:c} u_1 & u_3 \\ \cdots & \cdots \\ u_2 & u_4 \end{array}\right]$ et $B_i = \begin{bmatrix} b_1^i & b_3^i \\ b_2^i & b_4^i \end{bmatrix}$.

Exprimer les matrices u_j $(1 \leqslant j \leqslant 4)$ à l'aide des matrices E_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ et des éléments des matrices B_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$.

Tournez la page S. V. P.

2. Montrer que, pour tout endomorphisme L de $\mathfrak{L}$, il existe un unique quadruplet (B_1, B_2, B_3, B_4) de $\mathfrak{M}_2^4$ tel que :

$$\forall X \in \mathfrak{M}_2,\ L(X) = \sum_{i=1}^{4} E_i . X . B_i ; \qquad \text{(ou de façon équivalente } \hat{L} = \sum_{i=1}^{4} E_i \otimes B_i \text{)}.$$

On dira alors que (B_1, B_2, B_3, B_4) sont les « composantes » de L.

3. *a.* Soit T l'élément de $\mathfrak{L}$ qui, à toute matrice X de $\mathfrak{M}_2$, associe sa transposée T(X).

Quelle est la matrice $\hat{T}$ associée à T relativement à la base $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{M}_2$?

Déterminer les « composantes » de T, c'est-à-dire les matrices B_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ telles que $\hat{T} = \sum_{i=1}^{4} E_i \otimes B_i$.

b. Déterminer les « composantes » de l'identité $\mathfrak{I}$ (qui, à toute matrice X, associe la matrice X).

En déduire les « composantes » des applications S et Z de $\mathfrak{L}$ définies ainsi :

$$S : X \longrightarrow \frac{X + T(X)}{2}$$

$$Z : X \longrightarrow \frac{X - T(X)}{2}.$$

4. Reconnaître l'application de $\mathfrak{L}$ dont les « composantes » sont $(0, E_1 + E_4, E_1 + E_4, 0)$ puis celle dont les « composantes » sont $(E_2 + E_3, 0, 0, E_2 + E_3)$.

Troisième partie

Dans cette partie, on identifie les espaces vectoriels $\mathfrak{M}_2$ et $\mathbb{R}^4$.

Toute matrice $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}$ de $\mathfrak{M}_2$ est identifiée à l'élément de $\mathbb{R}^4$:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 + x_4E_4 .$$

A

À toute matrice X on associe son déterminant det(X). On définit ainsi une application Δ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que Δ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$.

Quelle est la matrice associée à Δ relativement à la base $\mathfrak{B}$?

Quel est le rang de Δ ?

Soit δ la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique Δ. Exprimer $\delta(X, Y)$ en fonction de tr X, tr Y et tr XY (où tr X désigne la trace de la matrice X).

2. On se propose de déterminer les formes quadratiques non nulles sur $\mathbb{R}^4$ qui vérifient $\Phi(X.Y) = \Phi(X)\,\Phi(Y)$ pour tout couple (X, Y) de matrices de $\mathfrak{M}_2$.

Démontrer les propriétés suivantes :

a. $\Phi(I) = 1$ où $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

b. Si X est régulière, $\Phi(X)$ est non nul ;

Tournez la page S. V. P.

c. Si X est singulière, $\Phi(X) = 0$.

(On pourra, pour cela, montrer qu'il existe, lorsque le rang de X est 1, deux matrices régulières P et Q de $\mathfrak{M}_2$ telles que : $P.X.Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.)

d. En considérant les deux équations en λ :

$$\Phi(X + \lambda I) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta(X + \lambda Y) = 0,$$

montrer que l'on a : $\Phi = \Delta$.

B

Soit Q l'application définie sur $\mathfrak{M}_2$ par $Q : X \longmapsto \det X - \frac{1}{4}(\text{tr } X)^2$.

1. Montrer que Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$.

   Écrire la matrice associée à Q relativement à la base $\mathfrak{B}$.

   Soit f la forme bilinéaire symétrique associée à Q.

   Écrire $f(X, Y)$ pour toute matrice X et Y de $\mathfrak{M}_2$.

   Montrer que $f(X, Y) = \frac{1}{4}(\text{tr } X \text{ tr } Y) - \frac{1}{2}\text{tr}(XY)$.

2. Montrer l'équivalence suivante : $Q(X) = 0 \Leftrightarrow X$ a une valeur propre double.

   L'ensemble $\{ X \in \mathfrak{M}_2 / Q(X) = 0 \}$ est appelé le *cône isotrope de Q*.

3. On appelle *noyau de f*, application bilinéaire associée à Q, l'ensemble $\{ X \in \mathfrak{M}_2 / \forall Y \in \mathfrak{M}_2, \ f(X, Y) = 0 \}$.

   Montrer que le noyau de f est l'ensemble des matrices scalaires de $\mathfrak{M}_2$ (c'est-à-dire des matrices λI, où $\lambda \in \mathbb{R}$).

4. On fait dans $\mathbb{R}^4$ le changement de coordonnées défini par :

$$X_1 = \frac{x_2 + x_3}{2} \qquad X_3 = \frac{x_1 + x_4}{2}$$

$$X_2 = \frac{x_1 - x_4}{2} \qquad X_4 = \frac{x_2 - x_3}{2}$$

(X_1, X_2, X_3, X_4) sont les coordonnées de X dans la nouvelle base $\mathfrak{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

a. Exprimer, dans cette base, det X, tr X et Q(X).

b. On considère $\mathfrak{M}'_2$ la partie de $\mathfrak{M}_2$ constituée des matrices de trace donnée t, toujours rapportée à la base $\mathfrak{B}$.

À chaque matrice $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix}$ (avec $t = x_1 + x_4$), on associe un point M de l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$X \longmapsto M \text{ de coordonnées } (X_1, X_2, X_4).$$

(i) Quelle est l'image de l'ensemble des matrices symétriques ?

(ii) L'image du cône isotrope de Q est une surface qu'on précisera et qui sépare l'espace en deux régions.

Caractériser ces régions par rapport aux valeurs propres des X correspondants.

(iii) Quelle est l'image des matrices singulières de $\mathfrak{M}'$?

On représentera chacun des ensembles obtenus, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail